

Title	或種ノ積分方程式ニツイテ（Ⅰ）
Author(s)	泉，信一；北川，敏男
Citation	全国紙上数学談話会． 61 p.2-p.7
Issue Date	1935-10-11
oaire:version	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74145
rights	
Note	

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

223. 或種ノ積分方程式ニツイテ (I)

泉 信一 (東北大)

北川 敏男 (阪大)

§1. 緒 論

1. §2ニ於イテハ積分方程式

$$f(x) = \frac{1}{2} \int_{-x-1}^{x+1} f(t) dt \dots\dots\dots (1)$$

ヲ解ク問題ニツイテ論ズル。前 = 泉氏¹⁾ハ

$$f(x) = O(e^{A|x|}) \dots\dots\dots (2)$$

ナル條件ヲ附加シタトキ (1) ハ ²⁾ Hopf-Wiener ノ理論ヲ用ヒテ解ケルコトヲ示シタ。コノニハ更ニ (1) ハ ³⁾ Ritt-Valiron ノ無限次微分方程式ノ理論ヲ用ヒテ解ケルコトヲ証明スル。

又 (2) ノ代⁴⁾ニ、 $f(x)$ = 正則ナルコトヲ假定シテモ (1) ヲ解クコトが出来ル。

2. 次ニ (1) ヲニツノ方向ニ一般化スル、ソノ一ツハ

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x-t) f(t) dt \dots\dots\dots (3)$$

之レヲ §3ニ於イテ論ズル。特ニ

$$\begin{aligned} K(x) &= \frac{1}{2} & |x| \leq 1 \\ &= 0 & |x| > 1 \end{aligned}$$

1) 泉信一，學士院記事 XI (1935)

2) cf. Paley-Wiener, *Fourier Transforms in the complex domain*, 1934

3) T. F. Ritt, *Trans. A. M. S.* 18 (1917) 及ビ Valiron, *Ann. l'École norm. sup.* 46 (1929)

泉信一：數物會誌、第四卷，第二及ビ三号参照。

4) Bochner, *Sitzbete. Preuss. Akad.* 1930.

トスルトキ (3) ハ (1) = ナル。コゝニハ (3) ヲ $f(x)$ が解析的ナル條件ノ下ニ解ク。コゝニ於ケル方法ハ全く同様ニシテ

$$f(x) = \int_0^{\infty} K(x-t) f(t) dt$$

ヲ解クコトガ出来ル。

3. 次ニ (1) ノモテーツノ一般化ハ

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_a^b f^{(k)}(x+t) d\varphi_k(t) \dots\dots\dots (4)$$

コゝニ (a, b) ハ有限區間デ $\varphi_k(t)$ ハ與ヘラレタ有界変分ノ函数デ、 $f(x)$ ハ求ムル函数デアアル。(4)ニ於イテ特ニ $n=1, a=-1, b=1$

$$\begin{aligned} \varphi_0(t) &= \frac{1}{2} & t < -1 & = \tau \\ &= 0 & |t| \leq 1 & = \tau \\ &= \frac{1}{2} & t > 1 & = \tau \end{aligned}$$

トオケバ、コレハ、積分方程式 (1) ト同値ナ問題トナル。更ニ、 $\varphi_k(t)$ ヲ有限個ノ *jump* ヲモツ *step-function* トスルトキ

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{\Delta} a_{i,k} f^{(k)}(x+t_i)$$

コレ *difference-differential equation* デアル。

之ハ Bochner⁵⁾ ニヨツテ $f(x)$ 及ビ n 次マデノ

derivative がスベテ $(-\infty, \infty)$ で可積分ナル場合が
取扱ハレテヲル、コゝニハ (2) の假定ト似タ

$$f^{(n-1)}(x) = O(e^{A|x|}) \dots\dots\dots (5)$$

ノ下ニ論ズル。

更ニ (4) ノ次ノ形ニ一般化スル。

$$f^{(n)}(x) + \sum_{k=0}^{n-1} p_k(x) \int_{a-0}^{b+0} f^{(k)}(x+t) d\varphi_k(t) = g(x)$$

コゝニ

$p_k(x)$ ハ多項式⁵⁾デア⁶⁾ル、之レヲ解クタメニ
Hilb-Perron⁶⁾ノ理論ヲ用ヰル。

$$\S 2. \text{ 積分方程式 } f(x) = \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} f(t) dt = \text{ツイテ}$$

1. 定理 1. $f(x)$ が

$$f(x) = \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} f(t) dt \dots\dots\dots (1)$$

ヲ満足シ且ツ

$$f(x) = O(e^{A|x|}) \dots\dots\dots (2)$$

ヲ満足スルトスル、コゝニ A ハ任意ノ正数デア^ル。

$$1 = \frac{1}{2u} (e^u - e^{-u}) \dots\dots\dots (2.1)$$

5) Bochner, *Fouriersche Integral*, 1932

6) Hilb: *Math. Annalen*, 82, 84 (1920, 1921)

Perron: *Math. Annalen*, 84 (1921)

ノ根ノミチ零デナク且ツ實數部ノ絶對値ガAヨリ小サイモノ
ヲ $u_{\pm 1}, \dots, u_{\pm p}$ トスル、然ルトキ

$$f(x) = A'x + B + \sum_{\substack{k=-p \\ u \neq 0}}^p A_k e^{-u_k x} \dots\dots\dots (3)$$

コノ A', B 及ビ A_k ハ任意ノ定數デアル。

コノ定理ハ前ニ Hopf-Wiener ノ積分方程式ノ理論
ヲ用ヒテ之ヲ証明シタ、コノニハ Ritt-Valiron ノ無
限次ノ微分方程式ノ理論カラ導イテ見ヨウ。

$$2. \int_0^x f(t) dt = F(x)$$

トオク トキ、(1)ハ

$$F'(x) = \frac{1}{2} \{F(x+1) - F(x-1)\} \dots\dots\dots (4)$$

然ルニ (1) ヲ満足スル $f(x)$ ハ何回デモ微分出来ル、故ニ
(4) ヲ n 回微分シテ

$$F^{(n+1)}(x) = \frac{1}{2} \{F^{(n)}(x+1) - F^{(n)}(x-1)\} \dots\dots\dots (5)$$

然ルニ (2) 及ビ (4) カラ

$$\begin{aligned} |F'(x)| &\leq \frac{1}{2} \{|F(x+1)| + |F(x-1)|\} \leq \frac{1}{2} e^{A|x|} (e^A + e^{-A}) \\ &\leq e^{A(|x|+1)} \end{aligned}$$

故ニ (5) カラ同様ニシテ

$$|F^{(n)}(x)| \leq e^{A(|x|+n)}$$

故ニ $F(x)$ ハ analytic デアル、從ツテ

$$F(x+1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F^{(n)}(x)}{n!}, \quad F(x-1) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{F^{(n)}(x)}{n!} \dots\dots\dots (6)$$

故 = (4) 也

$$F'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F^{(2n-1)}(x)}{(2n-1)!}$$

乃ち

$$f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{f^{(2n)}(x)}{(2n-1)!} \dots\dots\dots (7)$$

但し $(-1)! = 1$ トスル。之レ乃チ無限次ノ微分方程式デアル。

コノ = Valiron ノ定理ヲ應用スル。

(7) ノ母函数 (generating function) , order 1 デ, mean type デアル。故ニ $f(x)$ ハ (3) ナル形デ表ハサレル。

故ニ定理 1 が証明出來タ。

3. 定理 1 = 於ケル條件 (2) ノ代リニ, $F(x)$ が解析的デアルトスル。然ルトキ (6) が成立スル、故ニ (7) が得ラレル。

之レ = Valiron ノ定理ヲ應用スル。

(2.1) ノ根ヲ $\mu_0 = 0$, $\mu \pm 1$, $\mu \pm 2$, トスル。然ルトキ μ_0 が只一ツノ重根デ、他ハスベテ單根デアル。從ツテ Valiron ノ定理カラ次ノ定理が得ラレル。

定理 2. $f(x)$ が (1) ノ解析的解ナラバ,

$$f(x) = Ax + B + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k e^{-\mu_k x} + B_k e^{-\mu_k x})$$

コノ = $\mu \pm 1$, $\mu \pm 2$, ハ (2.1) ノ零デナイ根トスル。